数理解析研究所講究録
526巻 1984年 149-158

不良品の見落しがある検査について

長岡技術科学大学　藤野和建

製品ロットの検査で，検査方法が不完全なために不良品の見落しがおこるとき，この見落しの確率と，見落されて市場にでる不良品の個数を推定する方法を論ずる。

この2つの量が推定できるためには，いくつかの製品が少なくとも2度検査される必要がある。ここではまず，最初の検査で良品とされたもののみを再検査する場合を論じ，次に全製品を再検査する場合を考える。

1. 良品のみ再検査の場合

N個の製品よりなるロットを全数検査し，そこで良品とみなされたもの全数を再度検査する。

不良品の総数がMで，そのそれぞれの検出される確率が一定値θに等しいとすれば，1回目，2回目の検出される不良品の個数x_1，x_2の同時分布は

$$P(x_1, x_2; y, \theta) = \frac{M!}{x_1!\,x_2!\,y!}\theta^{x_1}(\theta\tau)^{x_2}(\tau^2)^y \tag{1}$$

となる。ただし，$\tau = 1-\theta$で，$y = M - x_1 - x_2$は2回とも見落された不良品の数を表わす。

ここで　$m = x_1 + x_2$　とし，$p(x;n,p)$　を２項分布の確率とすれば，（1）は

$$p(x_1, x_2; y, \theta) = p(x_2; m, \gamma_1)p(m; M, \gamma_2)$$

ただし，　$\gamma_1 = \tau/(1+\tau)$

$$\gamma_2 = 1 - \tau^2$$

と，mの分布と，mを与えたときのx_2の条件付分布に分解される。

これから，$\hat{\gamma}_1 = x_2/m$，したがって

$$\hat{\theta}_c = (x_1 - x_2)/x_1 \tag{2}$$

となり，さらに　$\hat{\gamma}_2 = (x_1^2 - x_2^2)/x_1^2$　から

$$\hat{M}_c = [m/\hat{\gamma}_2] = [x_1^2/(x_1 - x_2)]$$
$$\hat{y}_c = \hat{M}_c - m = [x_2^2/(x_1 - x_2)] \tag{3}$$

となる。ここに$[x]$はxを超えない最大の整数を示す。

この条件付最尤法はSanathanan（1972）による。

1.1　最尤推定

（1）をθで微分して0とおくと

$$\hat{\theta}' = m/(m + x_2 + 2y) \tag{4}$$

となる。これを（1）のθに代入するとyの尤度が得られるがそれは次の形となる。

$$l(y; x_1, x_2) = \log p(x_1, x_2; y, \hat{\theta}')$$

$$= \log((m+y)!) - \log(y!) + (x_2+2y)\log(x_2+2y) - (m+x_2+2y)\log(m+x_2+2y) + \text{const.}$$ 。

この値を最大にする整数$\hat{y}$がyの最尤推定量で，θの最尤推定量は$\hat{y}$を(4)に代入して得られる。

$\hat{y}$については次の定理が成立つ($m \geqq 1$)。

定理　$x_2 \geqq x_1+2$ のとき，yには有限な最尤解が存在しない。$x_2 < x_1+2$ では有限な解が存在して $\hat{y} \leqq \max(0, y_0)$ となる。ここに y_0 は $(2x_2^2 + x_1x_2 - 2x_1 - 4)/2(x_1 - x_2 + 2)$ を下まわらない最小の整数を意味する。

データが与えられたとき，$\hat{y}$を求めるのは幾分面倒であるが

$$\hat{y}^* = [(x_2-1)^2/(x_1-x_2+2)] \qquad (5)$$

が$\hat{y}$に対する満足すべき近似値を与える。

1.2　推定量の性質の数値的な検討

最尤推定量と条件付最尤推定量はそれぞれ $x_2 \geqq x_1+2$ および $x_2 \geqq x_1$ で存在しなくなるが，このことのおこる確率はMとθがある程度大きければ小さい。たとえば $M=20$, $\theta=0.7$では，それぞれ 0.002 および 0.009 であって，実際上無視できる大きさになる。

次に各推定量の，それらが有限になるという条件のもとでの平均と分散を，$M = 20,\ 50,\ 100$，$\theta = 0.1\ (0.1)\ 0.9$ の場合について求め，比較してみた。

M の推定量では，$\hat{M}$ の方が $\hat{M}_c$ よりも，θ がある程度大きいときには偏りが小さく，分散もまた小さい。一方，θ の推定については，$\hat{\theta}_c$ よりも $\hat{\theta}$ の方が幾分偏りが小さくなる。ただし，分散は $\hat{\theta}_c$ の方が多少大きい。

1.3　不良品の検出確率が変動する場合

不良品の検出される確率が，不良品ごとにことなるものとして，この確率 θ_i $(i = 1, 2, \cdots, M)$ が，互いに独立に同一の分布に従う確率変数 Θ_i の実現値であるとする。

このとき，事象

不良品 $1, \cdots, x_1$ は第1回目に検出

不良品 $x_1+1, \cdots, m$ は第2回目に検出

不良品 $m+1, \cdots, M$ は検出されない

の，$\Theta_i = \theta_i$ $(i = 1, \cdots, M)$ という条件のもとでの確率は

$$\prod_{j=1}^{x_1} \theta_j \cdot \prod_{j=x_1+1}^{m} \theta_j (1-\theta_j) \prod_{m+1}^{M} (1-\theta_j)^2$$

となる。

ゆえに，この事象の無条件の確率は

$$\{E(\Theta)\}^{x_1}\{E(\Theta(1-\Theta))\}^{x_2}\{E(1-\Theta)^2\}^{y}$$

となる。

このことから，1回目，2回目の検査で検出される不良品の個数 x_1，x_2 の分布は

$$p(x_1, x_2)$$

$$= \frac{M!}{x_1!\,x_2!\,y!}\{E(\Theta)\}^{x_1}\{E(\Theta(1-\Theta))\}^{x_2}\{E(1-\Theta)^2\}^{y} \quad (6)$$

であたえられる。

ここで

$$E(\Theta) = \theta \quad , \quad \mathrm{Var}(\Theta) = \sigma^2$$

とすれば，(6)は

$$p(x_1, x_2)$$

$$= \frac{M!}{x_1!\,x_2!\,y!}\,\theta^{x_1}(\theta\tau - \sigma^2)^{x_2}(\tau^2 + \sigma^2)^{y} \quad (7)$$

と書かれる。こうして，$\sigma^2 = 0$ の場合とくらべ，x_2 の周辺分布が小さい方に偏ることが知られる。

(7)を

$$p(x_1, x_2) = p(x_2; m, \gamma_1^*)\,p(m; M, \gamma_2^*)$$

$$\gamma_1^* = \frac{\theta\tau - \sigma^2}{\theta(1+\tau) - \sigma^2}$$

$$\gamma_2^* = 1 - \tau^2 - \sigma^2$$

と書きなおすと，

$$\gamma_1^* \leqq \gamma_1 \quad , \quad \gamma_2^* \geqq \gamma_2$$

となるから，$\sigma^2=0$ の場合にくらべ，m はふさくなり易く，M の推定量はふさくなり易く，θ の推定量は大きくなり易いことがわかる。

1.4　抜取検査の場合

ロットサイズNがあまりに大きければ，そのうちの n 個を抜取って上述の検査をする。

この場合，抜取られた n 個のサンプルの中の不良品の個数を M^* とすれば，x_1，x_2 の分布は，$h(x;n,M,N)$ を超幾何分布の確率として

$$p(x_1, x_2)$$
$$= h(M^*;n,M,N)\,p(x_1 : M^*,\theta)\,p(x_2 : M^*-x_1,\theta)$$

となる。

条件付最尤法では

$$\hat{M}^*_c = [\,x_1^2/(x_1-x_2)\,]$$
$$\hat{\theta}_c = (x_1-x_2)/x_1 \qquad (8)$$
$$\hat{M}_c = [\,\hat{M}^*_c(N+1)/n\,]$$

となる。

これらの推定量の性質の数値的な検討はまだなされていない。

2. 200％検査の場合

次に，1回目に不良品とされたものを含め，すべての製品を再検査する場合を考える。

不良品の総数をM，そのぞれぞれの検出される確率が一定値θとし，1回不良品とされたものの個数をz_1，2回不良品とされたものの個数をz_2とすれば，それらの同時分布は

$$p(z_1, z_2; y, \theta) = \frac{M!}{z_1!\, z_2!\, y!} (\theta^2)^{z_2} (2\theta\tau)^{z_1} (\tau^2)^{y} \quad (9)$$

となる。ここに，$\tau = 1-\theta$，$y = M - z_1 - z_2$。

ここで　$m = z_1 + z_2$　とすれば（9）は

$$p(z_1, z_2; y, \theta) = p(z_2; m, \gamma_1)\, p(m; M, \gamma_2)$$

ただし　$\gamma_1 = \theta / (1+\tau)$

$\gamma_2 = 1 - \tau^2$

と書かれる。

これから，条件付最尤推定量として，

$$\hat{\theta}_c = 2z_2 / (z_1 + 2z_2)$$
$$\hat{M}_c = m + [z_1^2 / 4z_2] \quad (10)$$
$$\hat{y}_c = [z_1^2 / 4z_2]$$

が得られる。

これらは$z_2 > 0$で存在する。

2.1 最尤推定

y と θ の対数尤度は,

$$
\begin{aligned}
l(y,\theta;z_1,z_2) &= \log((m+y)!) - \log(y!) \\
&\quad + (z_1+2z_2)\log\theta + (z_1+2y)\log\tau + \mathrm{const} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

となる。$\partial l/\partial\theta = 0$ から

$$\hat{\theta}' = (z_1+2z_2)/2(m+y) \qquad (12)$$

を得る。これを(11)の θ に代入して, y のみの対数尤度は

$$
\begin{aligned}
l(y;z_1,z_2) &= \log((m+y)!) - \log(y!) \\
&\quad + (z_1+2y)\log(z_1+2y) \\
&\quad - 2(m+y)\log\{2(m+y)\} + \mathrm{const} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

となる。

$$
\begin{aligned}
l'(y;z_1,z_2) &= \frac{1}{y+1} + \cdots + \frac{1}{y+m} - 2\log\left\{\frac{2(m+y)}{z_2+2y}\right\} \\
&= -\frac{z_2}{y} - \frac{z_1^2 - 2m(m-1)}{4y^2} + O(y^{-3})
\end{aligned}
$$

だから, $z_2 > 0$ なら y の有限な最尤解が存在する。

$z_2 = 0$ のとき, $z_1 = 0$ なら解は不定, $z_1 = 1$ なら $\hat{y} = 0$, $z_1 \geq 2$ では有限な解が存在しない。

最尤解は

$$\hat{y}^* = [z_1(z_1-2)/4z_2]$$

できわめてよく近似される。

2.2 推定量の性質の数値的な検討

$z_2=0$ のときには条件付最尤推定量が存在しないが，この確率 $(1-\theta^2)^M$ は，Mがある程度大きければきわめて小さい。

次に，$z_2>0$ という条件のもとでの各推定量の平均と分散を，§1.2 と同じMとθの組合せについて調べてみた。

Mの推定量，θの推定量とも，最尤推定量と条件付最尤推定量の間に大きな差異はみられない。いずれにせよ，さきの一旦良品とされたもののみを再検査する場合にくらべ，偏りも小さく，分散も少ない推定量が得られることは注目に値する。

2.3 不良品の検出確率が変動する場合

§1.3 と同じモデルのもとで，z_1，z_2 の同時分布は

$$p(z_1, z_2) = p(z_2; m, \gamma_1^*)\,p(m, M, \gamma_2^*)$$

ただし

$$\gamma_1^* = \frac{\theta^2+\sigma^2}{\theta(1+\tau)-\sigma^2}$$

$$\gamma_2^* = 1-\tau^2-\sigma^2$$

となる。

$$\gamma_1^* \geq \gamma_1 \quad , \quad \gamma_2^* \leq \gamma_2$$

であるから、今度もまた、$\sigma^2=0$ の場合にくらべて、M の推定量は小さくなり易く、θ の推定量は大きくなり易い。

2.4 抜取検査の場合

ロットサイズNがあまりに大きくて、n個のサンプルを抜取って、それらを全数2回検査すれば、サンプル中の不良品の数をM^* とするとき、条件付最尤法では

$$\hat{M}^*_c = m + [z_1^2 / 4z_2]$$

$$\hat{\theta}_c = 2z_2 / (z_1 + 2z_2)$$

$$\hat{M}_c = [\hat{M}^*_c (N+1) / n]$$

となる。

3. 結論

製品ロットの検査で、検査方法が不完全で不良品の見落しがおこるとき、見落しの確率とロット中の不良品の総数を推定するには、良品のみを再検査するより、200%検査を実施する方がずっとよい推定値を得やすい。